PART3 導関数の公式，積の導関数

要点整理と公式

要点① x^n の導関数と導関数の公式

関数 x^n の導関数について，数学Ⅱにおいて次のことを学んでいる。

x^n の導関数

n が正の整数のとき　$(x^n)'=nx^{n-1}$

（証明）n が正の整数のとき，二項定理により

$$(x+h)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+{}_nC_{n-1}xh^{n-1}+h^n$$

$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+nxh^{n-1}+h^n$$

$$(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h^2+\cdots\cdots+nxh^{n-1}+h^n$$

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\cdots\cdots+nxh^{n-2}+h^{n-1}$$

よって $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}$　より　$(x^n)'=nx^{n-1}$

また，次の導関数の公式 1 ～ 3 についても，数学Ⅱで学んだものと同様である。

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，k，l を定数とすると

1　$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　　　2　$\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

3　$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

（公式 1 の証明）　$\displaystyle\{kf(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}=\lim_{h\to0}\left\{k\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right\}=kf'(x)$

（公式 2 の証明）　$\displaystyle\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}=f'(x)+g'(x)$$

（公式 3 の証明）　$\{kf(x)+lg(x)\}'=\{kf(x)\}'+\{lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$

要点② 積の微分法

導関数について，次の公式が成り立つ。

導関数の公式

関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき

4　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

（公式 4 の証明）

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-\qquad\qquad + \qquad\qquad -f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

ここで，$g(x)$ は微分可能であるから連続関数　よって　$\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

したがって　$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(ex) 関数 $y=(2x+1)(x^2-3x-1)$ を微分すると

$$y'=(2x+1)'(x^2-3x-1)+(2x+1)(x^2-3x-1)'$$

$$=2(x^2-3x-1)+(2x+1)(2x-3)=6x^2-10x-5$$

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y = x^4 - 3x^2 + 5$

(2) $y = 2x^5 - 3x^3 + x$

(3) $y = (2x+1)(3x^2 - x + 2)$

(4) $y = (x^2 - 3)(x^2 + x + 1)$

Point Pickup

積の導関数

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

第 7 講 PART3 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $y=2x^4-3x^2+5x+6$

$y'=$ ア

① $4x^3-2x+5$　② $8x^3-6x+5$

③ $8x^3-6x+11$　④ $8x^4-6x^2+5x$

2 $y=-x^5+4x^3+x$

$y'=$ イ

① $5x^4+3x^2+1$　② $-5x^4+12x^2+x$

③ $-5x^4+12x^2+1$　④ $-5x^5+12x^3+x$

3 $y=(3x+1)(x^2-x+4)$

$y'=$ ウ

① $3x^2-6x+7$　② $9x^2-4x+11$

③ $9x^2+4x-11$　④ $9x^3-4x^2+11x$

4 $y=(x^2+1)(x^2+x-2)$

$y'=$ エ

① $4x^3-6x$　② $4x^3-3x^2+1$

③ $4x^3-3x^2+2x-1$　④ $4x^3+3x^2-2x+1$

PART3 導関数の公式，積の導関数

3 次の関数を微分せよ。

(1) $y=x^4-3x^2+5$

(2) $y=2x^5-3x^3+x$

(3) $y=(2x+1)(3x^2-x+2)$

(4) $y=(x^2-3)(x^2+x+1)$

[解答]

(1) $y'=4x^3-6x$

(2) $y'=10x^4-9x^2+1$

(3) $y'=(2x+1)'(3x^2-x+2)+(2x+1)(3x^2-x+2)'$

$=2(3x^2-x+2)+(2x+1)(6x-1)$

$=18x^2+2x+3$

(4) $y'=(x^2-3)'(x^2+x+1)+(x^2-3)(x^2+x+1)'$

$=2x(x^2+x+1)+(x^2-3)(2x+1)$

$=4x^3+3x^2-4x-3$

第 7 講　PART3 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②

[解説]

$y'=(2x^4-3x^2+5x+6)'$

$=\mathbf{8x^3-6x+5}$ [A]

[A]　n が正の整数のとき，$(x^n)'=nx^{n-1}$

2　**[正解]** イ：③

[解説]

$y'=(-x^5+4x^3+x)'$

$=\mathbf{-5x^4+12x^2+1}$ [B]

[B]　n が正の整数のとき，$(x^n)'=nx^{n-1}$

3　**[正解]** ウ：②

[解説]

$y'=(3x+1)'(x^2-x+4)+(3x+1)(x^2-x+4)'$ [C]

$=3(x^2-x+4)+(3x+1)(2x-1)$

$=3x^2-3x+12+6x^2-x-1$

$=\mathbf{9x^2-4x+11}$

[C]　関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

4　**[正解]** エ：④

[解説]

$y'=(x^2+1)'(x^2+x-2)+(x^2+1)(x^2+x-2)'$ [D]

$=2x(x^2+x-2)+(x^2+1)(2x+1)$

$=2x^3+2x^2-4x+2x^3+x^2+2x+1$

$=\mathbf{4x^3+3x^2-2x+1}$

[D]　関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに微分可能であるとき，$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$